MINISTERUL EDUCAȚIEI

LITERA

Dorin Linț
Maranda Linț
Sorin Doru Noaghi

Matematică

6

Manual pentru clasa a VI-a

CUPRINS

RECAPITULARE ȘI EVALUARE INIȚIALĂ 7
I. PROBLEME RECAPITULATIVE 7
II. TESTE DE EVALUARE INIȚIALĂ 9
TESTUL NR. 1 9
TESTUL NR. 2 9

1. MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE 11
1.1 Mulțimi. Relații între mulțimi 11
L1 Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale 11
L2 Relații între mulțimi 15
1.2 Operații cu mulțimi 18
L1 Reuniunea a două mulțimi. Intersecția a două mulțimi. Diferența a două mulțimi 18
L2 Aplicații: operații cu mulțimi 20
1.3 Divizibilitate în mulțimea numerelor naturale 23
L1 Recapitulare și completări 23
L2 Descompunerea numerelor naturale în produs de numere prime 26
L3 Determinarea celui mai mare divizor comun. Numere prime între ele 28
L4 Determinarea celui mai mic multiplu comun 31
L5 Proprietăți ale divizibilității în $\mathbb{N}$ 34
EVALUARE SUMATIVĂ 36

2. RAPOARTE. PROPORȚII 37
2.1. Rapoarte. Proporții. Regula de trei simplă 37
L1 Rapoarte 37
L2 Proporții 40
L3 Șir de rapoarte egale 44
L4 Mărimi direct proporționale. Mărimi invers proporționale 46
L5 Regula de trei simplă 49
L6 Procente. Rapoarte în viața cotidiană 52
2.2. Elemente de organizare a datelor 56
L1 Reprezentarea datelor prin grafice în contextul proporționalității. Reprezentarea datelor cu ajutorul unor softuri matematice 56
L2 Probabilități 60
EVALUARE SUMATIVĂ 63

3. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI 64
3.1. Mulțimea numerelor întregi. Reprezentare pe axa numerelor. Comparare și ordonare 64
L1 Mulțimea numerelor întregi. Reprezentarea numerelor întregi pe axa numerelor 64
L2 Modulul unui număr întreg. Compararea și ordonarea numerelor întregi 66
3.2. Operații cu numere întregi 70
L1 Adunarea și scăderea numerelor întregi. Proprietăți 70
L2 Înmulțirea numerelor întregi. Proprietăți 73
L3 Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului 76
L4 Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul. Reguli de calcul cu puteri 79
L5 Efectuarea calculelor în care intervin adunări și scăderi, folosind proprietățile operațiilor în $\mathbb{Z}$ 81
L6 Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor 83
3.3. Ecuații, inecuații, probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor/inecuațiilor în $\mathbb{Z}$ 85
L1 Ecuații în mulțimea numerelor întregi 85
L2 Inecuații în mulțimea numerelor întregi 88
L3 Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor/inecuațiilor în contextul numerelor întregi 91
EVALUARE SUMATIVĂ 93

4. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE 94
4.1. Număr rațional. Mulțimea numerelor raționale 94
L1 Număr rațional 94
L2 Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor. Modulul unui număr rațional 98
L3 Compararea și ordonarea numerelor raționale 101
4.2. Operații cu numere raționale 104
L1 Adunarea numerelor raționale. Scăderea numerelor raționale 104
L2 Înmulțirea numerelor raționale. Împărțirea numerelor raționale 106
L3 Puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul. Reguli de calcul cu puteri 110
L4 Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor 113
4.3. Ecuații de tipul $x+a=b$; $x\cdot a=b$; $x:a=b$, $(a\neq 0)$; $a\cdot x+b=c$, unde $a, b, c\in\mathbb{Q}$. Probleme care se rezolvă folosind ecuații de acest tip 116
L1 Ecuații de tipul $x+a=b$; $x\cdot a=b$; $x:a=b$; $(a\neq 0)$; $a\cdot x+b=c$, unde $a, b, c\in\mathbb{Q}$ 116
L2 Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor 119
EVALUARE SUMATIVĂ 122

5. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE 123
5.1. Unghiuri în plan 123
L1 Recapitulare și completări 123
L2 Unghiuri suplementare. Unghiuri complementare 126
L3 Unghiuri opuse la vârf. Unghiuri formate în jurul unui punct 129
L4 Unghiuri adiacente 133
5.2. Drepte paralele 138
L1 Drepte paralele. Axioma paralelelor 138
L2 Unghiuri formate de două drepte distincte cu o secantă 141
L3 Unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă. Criterii de paralelism 143
L4 Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice 147
5.3. Drepte perpendiculare în plan 151
L1 Drepte perpendiculare în plan. Distanța de la un punct la o dreaptă 151
L2 Mediatoarea unui segment 156
L3 Simetrie față de o dreaptă 159
5.4. Cercul 162
L1 Cercul. Elemente în cerc 162
L2 Unghi la centru. Măsura unghiului la centru 165
L3 Poziții relative ale unei drepte față de un cerc. Poziții relative a două cercuri 168
EVALUARE SUMATIVĂ 172

6. TRIUNGHIUL 173
6.1 Triunghiul. Construcția unui triunghi 173
L1 Triunghiul. Clasificare. Perimetru 173
L2 Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi 176
L3 Construcția triunghiurilor 179
6.2 Linii importante în triunghi 183
L1 Bisectoarele unghiurilor unui triunghi. Concurența bisectoarelor 183
L2 Mediatoarele laturilor unui triunghi. Concurența mediatoarelor 185
L3 Înălțimile unui triunghi. Concurență 188
L4 Medianele unui triunghi. Concurență 191
6.3 Congruența triunghiurilor 193
L1 Congruența triunghiurilor oarecare 193
L2 Criterii de congruență a triunghiurilor 196
L3 Criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice 200
L4 Metoda triunghiurilor congruente 203
6.4. Metoda triunghiurilor congruente. Aplicații 206
L1 Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi. Proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment 206
L2 Proprietăți ale triunghiului isoscel 209
L3 Proprietăți ale triunghiului echilateral 211
L4 Proprietăți ale triunghiului dreptunghic. Teorema lui Pitagora 214
EVALUARE SUMATIVĂ 218

RECAPITULARE FINALĂ ȘI EVALUARE SUMATIVĂ 219
I. PROBLEME RECAPITULATIVE 219
II. EVALUARE SUMATIVĂ 221
TESTUL NR. 1 221
TESTUL NR. 2 222
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI 223

1. MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

1.1 Mulțimi. Relații între mulțimi

L1 Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

Rezolvăm și observăm

În imaginea alăturată, putem observa: mai mulți elevi într-o sală de clasă, bănci, hărți, un ceas de perete, o bibliotecă, instrumente de scris, cărți, caiete și alte obiecte.
Dacă dorim să ne referim doar la o categorie de *obiecte* bine determinate, distincte, caracterizate printr-o *proprietate comună*, putem vorbi despre:

- *mulțimea elevilor* din clasă, fiecare elev reprezentând un *element* al mulțimii;
- *mulțimea băncilor* din clasă, fiecare bancă fiind un *element* al mulțimii;
- *mulțimea cărților* din clasă, *mulțimea* cărților din bibliotecă, *mulțimea* cărților de pe bănci;
- *mulțimea hărților* din clasă etc.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

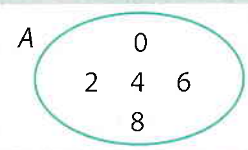
Considerăm enunțul: „Cifrele pare sunt: 0, 2, 4, 6, 8."
Elementele enumerate sunt *bine determinate* și sunt *distincte*. Acestea formează *mulțimea* cifrelor pare. Fiecare cifră pară este un *element* al mulțimii date. Elementele mulțimii se *enumeră* între acolade $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Mulțimea este o „colecție" de obiecte, *bine determinate și distincte*, numite *elementele* mulțimii.

Mulțimile se notează, de obicei, cu litere mari: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$.
Elementele mulțimilor se notează, de regulă, *cu litere mici*: $a, b, c, \ldots, x, y, z$.

Dacă A este o mulțime și x este un element al acesteia, vom spune că *x aparține mulțimii A* și scriem $x \in A$.	Dacă $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, atunci: $0 \in A$, $2 \in A$, $4 \in A$, $6 \in A$ și $8 \in A$.
Dacă A este o mulțime și x nu este un element al acesteia, vom spune că *x nu aparține mulțimii A* și scriem $x \notin A$.	Dacă $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, atunci: $1 \notin A$, $3 \notin A$, $5 \notin A$, $9 \notin A$.

Mulțimile pot fi reprezentate în unul dintre următoarele moduri:

1. prin *enumerarea elementelor*, între acolade:	$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$;
2. prin scrierea elementelor în interiorul unei curbe închise, numită *diagramă* Venn-Euler:	
3. prin precizarea unei *proprietăți comune*, specifică tuturor elementelor:	$A = \{x \mid x \text{ este cifră pară}\}$ Citim: „mulțimea elementelor x, cu proprietatea că x este cifră pară".

Observație. În clasa a VI-a, vom folosi doar primele două moduri de scriere a unei mulțimi: prin enumerarea elementelor sau prin diagrame Venn-Euler.

Mulțimea formată cu toate numerele naturale se numește *mulțimea numerelor naturale* și se notează $\mathbb{N}$.	Scriem $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$.
Mulțimea numerelor naturale diferite de 0 se numește *mulțimea numerelor naturale nenule* și se notează $\mathbb{N}^*$.	Scriem $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$.
O mulțime se numește *mulțime numerică* dacă toate elementele sale sunt numere.	Mulțimea $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ este o mulțime *numerică*. Mulțimile $\mathbb{N}$ și $\mathbb{N}^*$ sunt mulțimi *numerice*.
O mulțime se numește *mulțime nenumerică* dacă aceasta conține cel puțin un element care nu este număr.	Mulțimile $B = \{m, a, t, e\}$, $C = \{a, 1, 2\}$, $M = \{◆, \bullet, *\}$ sunt mulțimi *nenumerice*.

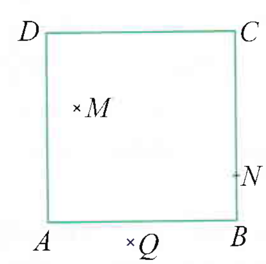
O mulțime poate să nu aibă *niciun element*, poate să aibă un *număr finit de elemente* sau poate să aibă un *număr infinit de elemente*.

O mulțime care nu are niciun element se numește *mulțimea vidă* și se notează $\varnothing$.	Mulțimea consoanelor din cuvântul „*ie*" este mulțimea vidă.
O mulțime care are un număr bine precizat (finit) de elemente se numește *mulțime finită*. Numărul elementelor unei mulțimi finite M se numește *cardinalul* acelei mulțimi și se notează card M.	Mulțimea vidă este o mulțime finită, cardinalul său este 0 prin definiție și scriem card $\varnothing = 0$. Mulțimea $M = \{1, 4, 7, 9\}$ este mulțime finită, *cardinalul* său este 4 și scriem card $M = 4$.
O mulțime care nu are un număr finit de elemente se numește *mulțime infinită*.	Mulțimile $\mathbb{N}$ și $\mathbb{N}^*$ sunt mulțimi infinite. În geometrie, dreapta, semidreapta, segmentul de dreaptă sunt formate dintr-*un număr nesfârșit* de puncte, adică dintr-o *infinitate* de puncte. În concluzie, dreapta, semidreapta, segmentul de dreaptă sunt *mulțimi infinite* de puncte.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1

În imaginea alăturată, $ABCD$ este pătrat, punctul M este în interiorul pătratului, punctul N este situat pe latura BC, iar punctul Q este în exteriorul pătratului.



a) Scrieți mulțimea V, a vârfurilor pătratului, mulțimea L, a laturilor pătratului și mulțimea P, a punctelor reprezentate, care nu aparțin pătratului.

b) Despre fiecare dintre punctele A, B, C, D, M, N, Q, stabiliți dacă aparțin pătratului $ABCD$. Scrieți rezultatul obținut, în fiecare caz, folosind unul din simbolurile $\in$ sau $\notin$.

Soluție. **a)** $V = \{A, B, C, D\}$; $L = \{AB, BC, CD, DA\}$; $P = \{M, Q\}$. **b)** $A \in ABCD$; $B \in ABCD$; $C \in ABCD$; $D \in ABCD$; $N \in ABCD$; $M \notin ABCD$; $Q \notin ABCD$.

Puțină gramatică

Numeralul cardinal exprimă un număr natural, fără a face referire la obiecte sau la ordinea obiectelor.
Numeralul ordinal exprimă locul sau ordinea numerică a obiectelor dintr-o înșiruire.

Aplicația 2.

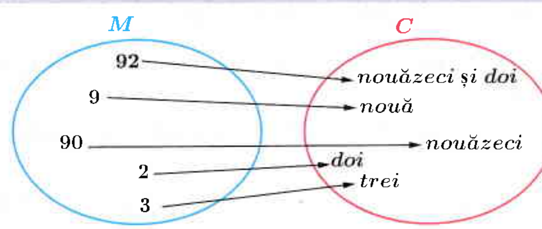
La o activitate de voluntariat au participat *nouăzeci și doi* de elevi ai școlii noastre. *Doi* dintre aceștia au coordonat activitatea, iar ceilalți *nouăzeci* s-au organizat în *nouă* grupe cu același număr de elevi.
Prima, a doua și *a treia* grupă sunt formate din elevi de clasa *a cincea* (a V-a), următoarele *trei* conțin numai elevi de clasa *a șasea* (a VI-a), iar celelalte grupe conțin numai elevi de clasa *a șaptea* (a VII-a).

I. a) Scrieți mulțimea C, a *numeralelor cardinale* întâlnite în text.
b) Scrieți mulțimea O, a *numeralelor ordinale* întâlnite în text.
c) Scrieți mulțimea G, a grupelor în care ar putea fi Claudiu, știind că este elev de clasa a VII-a.

Soluție.
I. a) C = {*nouăzeci și doi, doi, nouăzeci, nouă, trei*}.
b) O = {*prima, a doua, a treia, a cincea, a șasea, a șaptea*}.
c) În clasa a șaptea sunt elevii din ultimele trei grupe. G = {grupa *a șaptea*, grupa *a opta*, grupa *a noua*}.

II. Notăm cu A mulțimea elevilor participanți la activitate, cu B mulțimea elevilor care coordonează activitatea, cu D mulțimea elevilor organizați pe grupe, cu E mulțimea grupelor și cu F mulțimea grupelor elevilor de clasa a șaptea. Reprezentați prin diagrame Venn-Euler mulțimea M = {card A, card B, card D, card E, card F} și mulțimea C. Stabiliți, prin săgeți, corespondența între elementele celor două mulțimi.

Soluție.
Din text, rezultă:
card $A = 92$; card $B = 2$; card $D = 90$;
card $E = 9$; card $F = 3$;
Atunci, $M = \{2, 3, 9, 90, 92\}$. Fiecare element din mulțimea C reprezintă cardinalul uneia dintre mulțimile A, B, D, E, F.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Considerăm cuvintele: numărul; școala; matematica.
a) Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimea literelor din care sunt formate cuvintele date.
b) Copiați pe caiete și completați tabelul următor, folosind modelul dat.

Cuvântul	numărul	școala	matematica
Numărul literelor cuvântului	7		
Mulțimea formată cu literele cuvântului	{n, u, m, ă, r, l}		
Cardinalul mulțimii formate cu literele cuvântului	6		

2. Considerăm numerele: 2022; 321321; 11001100.
a) Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimea cifrelor din care sunt formate numerele date.
b) Copiați pe caiete și completați tabelul următor, folosind modelul dat.

Numărul	2022	321 321	11 001 100
Numărul cifrelor numărului	4		
Mulțimea formată cu cifrele numărului	{0, 2}		
Cardinalul mulțimii formate cu cifrele numărului	2		

3. Considerăm mulțimile:
$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$,
$C = \{100, 200, 300, \ldots 900\}$, $D = \{0, 5, 10, 15, 20, \ldots, 40\}$.
Determinați cardinalul fiecăreia dintre mulțimile date.

4. Scrieți, folosind diagrame Venn-Euler:
   a) mulțimea *A*, formată din toate numerele naturale mai mici decât 3;
   b) mulțimea *B*, formată din toate numerele impare cuprinse între 7 și 14;
   c) mulțimea *C*, formată din vocalele cuvântului *exercițiu*.

5. Se consideră mulțimea *P*, a tuturor județelor și mulțimea *T*, a tuturor orașelor României.
   a) Scrieți trei elemente ale mulțimii *P*.
   b) Scrieți patru elemente ale mulțimii *T*.

6. Scrieți mulțimea cifrelor din sistemul zecimal de numerație, în fiecare dintre următoarele moduri:
   a) prin enumerarea elementelor;
   b) prin diagrame Venn-Euler.

7. Fie *M* mulțimea numerelor naturale de forma $m = 5 \cdot n + 3, n \in \mathbb{N}$.
   a) Scrieți cele mai mici cinci elemente conținute de mulțimea *M*.
   b) Verificați dacă numerele 29, 48 și 2023 sunt elemente ale mulțimii *M*.
   c) Demonstrați că mulțimea *M* nu conține pătrate perfecte

8. Scrieți mulțimea tuturor numerelor, de cel mult două cifre, care se pot forma doar cu cifrele 0 și 1.

9. Considerăm mulțimile: $M = \{2, 4, 6, 9\}$, $P = \{1, 2, 4, 8\}$. Copiați tabelul pe caiete și completați în caseta liberă litera ***A***, dacă afirmația este adevărată și litera ***F***, dacă afirmația este falsă.

Propoziția	***A/F***
$2 \in P$	**A**
$2^2 \notin P$	
$2 \in M$ și $2 \notin P$	
$4 \in M$ sau $4 \in P$	

Propoziția	***A/F***
$5 \notin P$	
$3^2 \notin M$	
$6 \in M$ sau $6 \in P$	
card M = card P	

10. Folosind harta administrativă a României, scrieți mulțimea județelor din care fac parte orașele: Alba-Iulia, Bușteni, Constanța, Deva, Eforie, Mangalia, Piatra-Neamț, Timișoara, Sinaia.

11. Fie *a*, *b* cifre nenule în baza 10 care verifică inegalitățile: $1 < a + 2 \cdot b < 7$.
   a) Scrieți mulțimea tuturor numerelor de două cifre care se pot forma cu cifrele *a* și *b*.
   b) Determinați cardinalul mulțimii obținute.

Minitest

Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.

15 p 1. Se consideră mulțimea *T* a tuturor orașelor din Transilvania. Un element al mulțimii *T* este:
A. Buzău; **B.** Arad; **C.** Târgoviște; **D.** Medgidia.

15 p 2. Mulțimea cifrelor impare, scrisă prin enumerarea elementelor, este:
A. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; **B.** $\{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$; **C.** $\{1, 3, 5, 9\}$; **D.** $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

20 p 3. Cel mai mare element al mulțimii pătratelor perfecte de cel mult două cifre este:
A. 90; **B.** 100; **C.** 81; **D.** 99.

20 p 4. Dacă *x* este număr natural și $2 \in \{x - 3, x + 3\}$, atunci *x* este egal cu:
A. 2; **B.** 3; **C.** 1; **D.** 5.

20 p 5. Dacă $y + 2$ și $y + 5$ sunt elemente ale mulțimii $\{4, 6, 7, 8\}$, atunci *y* este egal cu:
A. 2; **B.** 4; **C.** 6; **D.** 7.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L2 Relații între mulțimi

Rezolvăm și observăm

Considerăm mulțimea A, a numerelor naturale impare, mai mici decât 13, mulțimea B, a numerelor naturale impare și mulțimea $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$.

a) Scrieți mulțimea A prin enumerarea elementelor.

b) Pentru mulțimile A și C, stabiliți dacă există elemente care aparțin uneia dintre mulțimi și nu aparțin și celeilalte.

Soluție

a) Numerele naturale impare, mai mici decât 13 sunt: 1, 3, 5, 7, 9, 11, deci $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$.

b) Cum $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, deducem că cele două mulțimi *au exact aceleași elemente*.

Despre mulțimile A și C vom spune că sunt *egale*.

c) Pentru mulțimile A și B, stabiliți dacă există elemente care aparțin uneia dintre mulțimi și nu aparțin și celeilalte.

c) Dacă un element aparține mulțimii A, atunci acesta este impar, deci aparține și mulțimii B. Pe de altă parte, numărul 27 este impar, adică aparține mulțimii B, dar nu aparține mulțimii A. Prin urmare, există elemente ale mulțimii B care nu aparțin mulțimii A.

Vom spune că:
- mulțimea A *este inclusă* în mulțimea B sau că mulțimea B *include* mulțimea A sau că mulțimea A este *submulțime* sau *parte* a mulțimii B.
- mulțimea B *nu este inclusă* în mulțimea A sau că mulțimea A *nu include* mulțimea B.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Două mulțimi sunt *egale* dacă au *aceleași elemente*. Dacă A și B sunt două mulțimi egale, scriem $A = B$.	Dacă A este mulțimea cifrelor în baza 10 și B este mulțimea numerelor naturale mai mici decât 10, atunci $A = B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Dacă A și B nu sunt egale, scriem $A \neq B$.	Dacă A este mulțimea cifrelor în baza 2, iar $B = \{0, 1, 2\}$, atunci $A = \{0, 1\}$ și nu conține elementul 2, deci $A \neq B$.
Mulțimea A *este inclusă* în mulțimea B dacă toate elementele mulțimii A sunt și elemente ale mulțimii B. Dacă mulțimea A *este inclusă* în mulțimea B, scriem $A \subset B$; Mulțimea A se numește *submulțime* sau *parte* a mulțimii B.	$\varnothing \subset M$, oricare ar fi mulțimea M. $M \subset M$, oricare ar fi mulțimea M. Toate elementele mulțimii $A = \{0, 1\}$ sunt și elemente ale mulțimii $B = \{0, 1, 2\}$, deci $A \subset B$, iar A este *submulțime* a mulțimii B.
Dacă mulțimea A *nu este inclusă* în mulțimea B, scriem $A \not\subset B$.	Pentru mulțimile $A = \{a, 2, c\}$ și $B = \{a, c, 7\}$, $2 \in A$, dar $2 \notin B$, deci $A \not\subset B$. $7 \in B$, dar $7 \notin A$, deci $B \not\subset A$.

Observații.
Dacă mulțimea A *este inclusă* în mulțimea B, mai spunem și că mulțimea B *include* mulțimea A și scriem $B \supset A$.
Dacă A *nu este inclusă* în mulțimea B, mai spunem și că mulțimea B *nu include* mulțimea A și scriem $B \not\supset A$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

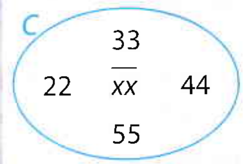
Aplicația 1

Se consideră mulțimile $A = \{11, 22, 33, 44, 55\}$, $B = \{11, \overline{2a}, \overline{b5}, 44, \overline{cc}\}$ și mulțimea C dată prin diagrama alăturată.

a) Determinați cifrele a, b, c astfel încât $A = B$.

b) Pentru a, b, c, determinate la subpunctul a), identificați cifra x astfel încât $B = C$.

c) Folosind valorile obținute la subpunctele a) și b), stabiliți relația dintre mulțimile A și C.



Soluție. **a)** Pentru ca $A = B$, adică pentru ca A și B *să aibă aceleași elemente, trebuie ca* $\overline{2a} = 22$, $\overline{b5} = 55$ și $\overline{cc} = 33$. Obținem $a = 2$, $b = 5$, $c = 3$.

b) Din $B = C$, rezultă $\overline{xx} = 11$, deci $x = 1$.

c) $A = \{11, 22, 33, 44, 55\} = C$.

Reținem!

1. Orice mulțime este egală cu ea însăși. $A = A$, oricare ar fi mulțimea A.
2. Dacă $A = B$, atunci $B = A$.
3. Dacă $A = B$ și $B = C$, atunci $A = C$.

Observații. **1.** Dacă $A = B$, atunci card A = card B.
2. Există mulțimi diferite care au același număr de elemente, adică $A \neq B$ *și card* A = card B

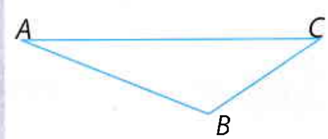
Aplicația 2

Triunghiul ABC, reprezentat în imagine, este mulțimea tuturor punctelor din plan situate pe cel puțin unul dintre segmentele AB, BC, AC.

a) Scrieți mulțimea L, a laturilor triunghiului și mulțimea V, a vârfurilor triunghiului.

b) Scrieți submulțimile mulțimii L care au cardinalul 2.

c) Scrieți toate submulțimile mulțimii V.



Soluție. **a)** $L = \{AB, BC, CA\}$; $V = \{A, B, C\}$. **b)** $\{AB, BC\}$; $\{AB, CA\}$; $\{BC, CA\}$;
c) $\varnothing$; $\{A\}$; $\{B\}$; $\{C\}$; $\{A, B\}$; $\{B, C\}$; $\{A, C\}$; $\{A, B, C\}$.

Aplicația 3

Stabiliți, argumentat, dacă sunt adevărate sau sunt false propozițiile: $\{1, 2, 3\} \subset \{0, 2, 1, 7\}$; $\{3\} \subset \{0, 1, 2, 3, 7\}$; $\varnothing \not\subset \{0\}$; $\{a, b, c\} \supset \{a, c\}$.

Rezolvare

Propoziția	*A/F*	Justificare
$\{1, 2, 3\} \subset \{0, 2, 1, 7\}$	F	$3 \in \{1, 2, 3\}$, dar $3 \notin \{0, 2, 1, 7\}$
$\{3\} \subset \{0, 1, 2, 3, 7\}$	A	$3 \in \{3\}$ și $3 \in \{0, 1, 2, 3, 7\}$
$\varnothing \not\subset \{0\}$	F	$\varnothing$ este submulțime a oricărei mulțimi
$\{a, b, c\} \supset \{a, c\}$	A	$a \in \{a, c\}$ și $a \in \{a, b, c\}$; $c \in \{a, c\}$ și $c \in \{a, b, c\}$.

Reținem!

a) Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi A. Scriem $\varnothing \subset A$.

b) Dacă $A \subset B$ și $B \subset C$, atunci $A \subset C$.

c) Au loc afirmațiile: $\mathbf{c_1}$: Dacă $A \subset B$ și $B \subset A$, atunci $A = B$. $\mathbf{c_2}$: Dacă $A = B$, atunci $A \subset B$ și $B \subset A$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

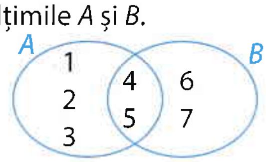
1. Fie mulțimea $M = \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$. Copiați pe caiete și scrieți în caseta liberă **A**, dacă propoziția este adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	***A/F***	Propoziția	***A/F***
$\{2, 3\} \subset M$		$\{2, 6\} \not\subset M$	
$\{6, 7\} \not\subset M$		$\{3, 4, 5\} \not\subset M$	
$\{3, 6, 7\} \subset M$		$\{0, 1, 6\} \not\subset M$	
$\{2, 8\} \subset M$		$\{1, 2, 3, 4, 5, 8\} \subset M$	

2. Scrieți toate submulțimile pentru fiecare dintre mulțimile:
a) $A = \{a, b\}$;
b) $B = \{0, 1, 2\}$;
c) $C = \{2, 3, 9, 10\}$.

3. Scrieți submulțimile cu două elemente, ale mulțimii literelor cuvântului „*capac*".

4. În figura următoare sunt reprezentate prin diagrame mulțimile A și B.



a) Determinați mulțimea M, a elementele comune mulțimilor A și B.
b) Scrieți submulțimile mulțimii M.
c) Determinați mulțimea C, a elementelor care aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B.
d) Scrieți toate submulțimile mulțimii C.

5. Mulțimea M are zece elemente. Precizați numărul submulțimilor mulțimii M, care au cardinalul 2.

6. Se consideră mulțimea $X = \{13, 23, 33, 43, \ldots, 93\}$.
a) Determinați submulțimile mulțimii X care sunt formate numai din numere naturale divizibile cu 3.
b) Decideți, justificând răspunsul dat, dacă există submulțimi nevide ale mulțimii X, formate numai din pătrate perfecte.

7. Determinați valorile numărului natural a, astfel încât mulțimea $\{a, 7\}$ să fie submulțime a mulțimii $\{6, 7, 8\}$.

8. Determinați mulțimea A, știind că $\{1, 3, 5\} \subset A$ și $A \subset \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

9. Mulțimile A și B sunt egale. Determinați elementele a și b pentru fiecare dintre cazurile:
a) $A = \{1, a, 3\}$, $B = \{2, 3, b\}$
b) $A = \{a, 7, 11\}$, $B = \{1, b, 11\}$
c) $A = \{9, 16, a + b\}$, $B = \{a + 5, 16, 23\}$

10. Fie mulțimea $M = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$. Determinați submulțimile mulțimii M, de forma $\{a, b, c\}$, unde $a + b = c^2$.

Minitest

1. Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.

15 p **a)** O submulțime a mulțimii numerelor prime este:
A. $\{1, 2, 3, 5\}$; **B.** $\{2, 4, 6, \ldots\}$; **C.** $\{15, 17\}$; **D.** $\{2, 3, 2+3, 23\}$.

15 p **b)** Dacă elementele mulțimii A sunt toate numerele naturale cuprinse între 2 și 5, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, iar mulțimea C este formată din numerele naturale mai mici decât 5, atunci:
A. $A \subset B$; **B.** $B \subset C$; **C.** $C \subset A$; **D.** $B \subset A$.

15 p **c)** Numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimi $\{1, 11, 111\}$ este:
A. 1; **B.** 2; **C.** 3; **D.** 4.

15 p **d)** Mulțimile $\{x - 3, x + 3\}$ și $\{17, 23\}$ sunt egale pentru x egal cu:
A. 14; **B.** 20; **C.** 26; **D.** 23.

30 p **2.** Copiați pe caiete și completați spațiile libere cu unul din simbolurile $\subset$ sau $\not\subset$ pentru a obține enunțuri adevărate:
a) $\{3\} \ldots \{1, 2, 3\}$; **b)** $\{a, b, c, d, e\} \ldots \{a, b\}$; **c)** $\varnothing \ldots \mathbb{N}$.

Notă: Timp de lucru 20 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.